VARIÁVEIS DE ESTADO CAPÍTULO 4

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES DAS VARIÁVEIS DE ESTADO**

* 1. [Introdução 4-01](#_TOC_250000)
  2. Transformação linear das variáveis de estado 4-02
  3. Transformação das equações de estado e de saída 4-03
  4. Matriz *A* diagonalizada 4-06
  5. Transformação por similitude. Auto-vetores 4-08
  6. Outros casos de transformações 4-18
  7. Exercícios propostos 4-22

# *Introdução*

Como vimos no capítulo 1, as variáveis de estado caracterizam-se por propriedades básicas que são traduzidas por um modelo matemático formado por duas equações vetoriais que se apresentam necessariamente sob as formas:



*x*  *f* (*x*, *u*)

* + - equação de estado

*y*  *g*(*x*, *u*)

* + - equação de saída

No caso dos sistemas lineares, em particular, as funções *f* e *g*, passam a ser combinações lineares das variáveis *x* e *u* e podem ser apresentadas respectivamente sob a forma:



*x*    *x*    *u y*  *C*  *x*  *D*  *u*

Sempre que o modelo matemático de um sistema puder ser apresentado sob essa forma, qualquer que seja o critério de escolha das variáveis *x*, estas serão consideradas variáveis de estado. Já sabemos, inclusive, que há vários critérios clássicos recomendáveis para escolha dessas variáveis. Por exemplo, as chamadas variáveis de estado de fase. Ou a escolha de variáveis que caracterizam as condições iniciais de um sistema. Qualquer que seja a escolha, porém, o número de variáveis será sempre igual à ordem do sistema.

No estudo que se segue consideraremos apenas o caso de sistemas lineares.

# *Transformação linear das variáveis de estado*

As variáveis de estado que descrevem um sistema podem ser substituídas por outras, obtidas das primeiras por meio de uma transformação linear. Assim, o estado de um sistema pode ser descrito pelo vetor:

 *x*1 

*x* 

*x*  *x*(*t*)   2 

 M 

 

*x*

 *n* 

ou, por um outro vetor

 *x*'1 

*x*' 

*x*'  *x*' (*t*)   2 

 M 

 



*x*'

*n* 

desde que

*x*'1  11  *x*1  12  *x*2  13  *x*3  K  1*n*  *xn*

*x*'2  21  *x*1  22  *x*2  23  *x*3  K  2*n*  *xn*

K K K K K K

*x*'*n*  *n*1  *x*1  *n* 2  *x*2  *n*3  *x*3  K  *nn*  *xn*

ou seja,

*x*'    *x*

onde P é o operador matricial da transformação linear

11





   21

K

12

22

K

13

23

K

K 1*n* 





K 2*n* 

K K 

 



*n*1

*n* 2

*n*3

*nn* 

 K  

Se a matriz P for não singular, isto é, se existir a matriz inversa

*Q*  1

teremos também

  *Q* 1

onde

*q*11

*q Q*   21

 K

*q*12 *q*22

K

*q*13 *q*23

K

K *q*1*n* 



*q*

K 2*n* 

K K 



*q*

 *n*1

*qn* 2

*qn*3



K *qnn* 

e, consequentemente

*x*1  *q*11  *x*'1 *q*12  *x*'2 *q*13  *x*'3  K  *q*1*n*  *x*'*n*

*x*2  *q*21  *x*'1 *q*22  *x*'2 *q*23  *x*'3  K  *q*2*n*  *x*'*n*

K K K K K K

*xn*  *qn*1  *x*'1 *qn*2  *x*'2 *qn*3  *x*'3  K  *qnn*  *x*'*n*

# *Transformação das equações de estado e de saída*

Retomemos as equações de estado e de saída:



*x*  *A*  *x*  *B*  *u y*  *C*  *x*  *D*  *u*

Considerando a transformação de variáveis

*x*'  *P*  *x*

e sua inversa

*x*  *Q*  *x*'

onde

*Q*  *P* 1 e também

*P*  *Q* 1

podemos escrever as equações acima em função das

novas variáveis *x*'



*Q*  *x*'  *A*  *Q*  *x*'*B*  *u*

*y*  *C*  *Q*  *x*'*D*  *u*

ou



*x*' 

*Q* 1  *A*  *Q*  *x*'*Q* 1

 *B*  *u*

*y*  *C*  *Q*  *x*'*D*  *u*

Esse resultado permite que se escrevam as novas equações sob a forma



*x*'  *A*'  *x*'*B*'*u*

*y*  *C*'  *x*'*D*  *u*

onde

*A*'  *Q* 1  *A*  *Q B*'  *Q* 1  *B*

ou *A*  *Q*  *Q*  *A*'

e *C*'  *C*  *Q*

A matriz de transmissão *D* não se altera nessa transformação.

O fato de que as novas variaveis *x'*, satisfazem uma equação com a forma normal das equações de estado, prova que essas variáveis qualificam-se como variáveis de estado.

Uma importante propriedade relativa às transformações lineares das variáveis de estado é a que se refere à invariança dos auto-valores da matriz *A* do sistema, essas transformações vêm expressas pelo teorema:

*Os auto-valores da matriz* ***A****, são invariantes numa transformação linear* ***Q****, de* ***x*** *em*

***x'****.*

De fato, se

*A*  *Q*  *A*'  *Q* 1, podemos escrever para qualquer auto-valor *s* de *A*:

[*s*  *I*  *A*]  [*s*  *Q*  *Q* 1  *Q*  *A*'*Q* 1 ]  *Q*  [*s*  *I*  *A*']  *Q* 1

Recordando que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, vem:

det  [*s*  *I*  *A*]  det (*Q*)  det  [*s*  *I*  *A*']  det *Q* 1 

Sendo a matriz *Q* não singular (isto é, sendo

det(*Q*)  0

e consequentemente também

det(*Q*')  0 ), resulta que det([*s*  *I*  *A*])  0 , = 0, implica em se ter, também,

det([*s*  *I*  *A*' ])  0 . Logo, se *λ* é auto-valor de *A*, será necessariamente também auto- valor de *A'*. Portanto, os auto-valores de um sistema são independentes das variáveis de estado utilizadas na descrição do sistema.

*Exemplo 1*: Dado o sistema cuja representação de estado é descrita pelas matrizes:

*A*   0 1 

*B*  0

*C*  1 0 e

*D*  0

 12  7

1

   

Determine as novas equações do sistema resultantes da transformação de variáveis de estado definida pelas relações:

*x*'1  3  *x*1  2  *x*2

*x*'2  *x*1  *x*2

Verifique também a invariança dos auto-valores da matriz *A*.

*Solução*:

*P*  *Q* 1  3 2

1

1







det (*P*)    1

*Q*   1



 1

 2



3



*A*'  *Q* 1  *A*  *Q*  3

1

1

 

2   0

1    1

 2   13

15

Verificação:







3



6





*A*  *Q*  *Q*  *A*'

   12

 7

 1

   6 

*A*  *Q*   0

1    1

 2   1 3

 12







 7  1

  5 

O.K.

3



3





*Q*  *A*'   1

 2   13

15   1 3

 1



3





   6

  5 

....................................................

6



3





Verificação da invariança dos auto-valores:

det (*s*  *I*  *A*)  det  *s*

12



det (*s*  *I*  *A*')  det *s*  13

 1   *s* 2  7  *s*  12  (*s*  3)  (*s*  4)



*s*  7

 15   (*s*  13)  (*s*  6)  90  *s* 2  7  *s*  12

 *s*  6



6



Observe que os polinômios característicos das duas matrizes são iguais. Logo os auto-

valores serão os mesmos, a saber

*s*1  3 e

*s*2  4 . Finalmente:

*B*'  3

2  0  2

*C*'  1

0  1

 2  1

 2

1 1

1

1

 1 3 

       

....................................................

No estudo dos sistemas, recorre-se as transformações de variáveis de estado por vários motivos, como por exemplo, a simplificação dos cálculos ou da manipulação das matrizes, a facilidade de pôr em evidência propriedades do sistema, efetuar a realimentação de estado, etc.

Há dois tipos importantes de transformações de variáveis de estado, a saber:

1. a transformação por similitude, isto é, a transformação que diagonaliza a matriz *A* do sistema (ou seja, que transforma *A* numa matriz *A'*, onde apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero);
2. a transformação que resulta numa matriz do sistema de forma canônica.

# *Matriz A diagonalizada*

Vamos estudar neste parágrafo como é constituída a matriz *A'* que resulta da transformação que diagonaliza a matriz *A* de um sistema. Adotaremos nesse caso a

notação

*A*'  *Ad* .

Seja *A* um sistema de ordem *n* , cuja matriz *A* possui os auto-valores

*s*1 , *s*2 , K *sn* ,

todos distintos, isto é, se

*i*  *j* , então

*si*  *s j*

(diz-se que todos os auto-valores são

simples, ou que não há auto-valores múltiplos).

Teremos qualquer que seja a matriz *A*

det (*s*  *I*  *A*)  (*s*  *si* )  (*s*  *s*2 ) K(*s*  *sn* )

Por outro lado, sendo

*A*'  *Ad*

a matriz diagonalizada, obtida pela transformação

*A*  *Q* 1  *A*  *Q*

*d*

podemos escrever

 *a* 0 K 0 

 

0

*b*

0

* K

*A*  *Q* 1  *A*  *Q*  

*d* K



0





K K K



*d*

0 K 

Evidentemente resulta:

det (*s*  *I*  *Ad* )  (*s*  *a*)  (*s*  *b*) K(*s*  *d* )

Conclue-se que *a, b, ..., d*, são os auto-valores de

*Ad* . Mas, como os auto valores não

se alteram com a transformação de *A* em

*Ad* , resulta

*a*  *s*1

*b*  *s*2

....

*d*  *sn*

o que significa que a matriz diagonalizada de um sistema tem como elementos da diagonal principal, os auto-valores da matriz *A* do sistema:

*s*1

 0

*A*  

*d* K

0 K 0 

*s*2 K 

0



K K K

 

0

0



K *s*

*n* 

*Observação:* A diagonalização é sempre possível nos casos em que os auto-valores da matriz *A* forem todos distintos. Se houverem auto-valores múltiplos, a diagonalização nem sempre é possível. Nesse caso o que mais se aproxima da diagonalização é a forma de Jordan.

*Exempl o 2* : Determinar as matrizes diagonalizadas que se obtêm a partir das matrizes *A*1

e *A*2 .

 0 1 0 



 1

 134 39

8



*A*   0 0 1 





1

2

*A*   0

 38 

 8  14  7

 0

 153 32

*Solução:*

Note que as duas matrizes têm os mesmos auto-valores, que são -1, -2, -4. Logo a matriz diagonalizada que se obtém nos dois casos será a mesma:

 1 0

*A*   0  2



*d*

 0 0

0 



0



 4

*Exemplo 3*: As equações de estado e de saída de um sistema linear são as seguintes:

  

 2

2   *x*  2 1  *u* 

 *x* 

 *x*1  



 1   1

*y*  1

1 1

   1

 3 *x*  1 0,5

*u* 

*x* 

*x* 2  

  2  

  2 

 2 

Deseja-se representar esse sistema por meio das variáveis:

*x*'  *x*1  *x*2 e *x*'2  *x*1  2  *x*2

Determine as novas equações de estado e de saída.

*Solução:*

Sendo

*x*'  *P*  *x* onde

*P*  *Q* 1, temos neste caso:

 *x*'1  1

1   *x*1 

1 1 1 

1 23

13 

*x*'

  1

 2  *x* 

*P*  *Q*

 1

 2

*Q*  *P*

  1

 1 

 2  

  2   

 3

3

1 1

1   2

2  23

13 

 1 0 

*A*'  *Q*

 *A*  *Q*  1

 2   1

 3   1

 1    0

 4

  

  3

3  

Note que obtivemos a matriz do sistema, diagonalizada. Portanto os elementos da diagonal principal são os auto-valores de *A*, o que pode ser facilmente comprovado.

*B*'  *Q* 1  *B*  1

1   2

1   3

1,5

  2  0,5  

1



1



0

0









23 13 

*C*'  *C*  *Q*  1

1  1

 3



  1 0

 13

As equações de estado e de saída do sistema, descrito pelas variáveis de estado respectivamente:

*x*'1 e

*x*'2

são

  

 1

0   *x*'  3 1,5 *u* 

 *x*' 

 *x*1 ' 



 1   1

e *y*  1

0 1

   0

 4

*x*'  0 0  *u* 

*x*' 

*x* 2 ' 

  2  

  2 

 2 

# *Transformação por similitude. Auto-vetores.*

A matriz *Q* da transformação que diagonaliza a matriz *A* do sistema, permite escrever:

*A*  *Q*  *Q*  *Ad*

Admitindo por simplicidade, que a matriz *A* tenha dimensão 3x3, a equação acima se escreve:

*a*11

*a*12

*a*13 

*q*11

*q*12

*q*13 

*q*11

*q*12

*q*13 

*s*1 0 0 

*a a*

*a*   *q q*

*q*   *q q*

*q*    0 *s* 0 

 21 22

23   21 22

23   21 22

23   2 

*a*31

*a*32

*a*33 

*q*31

*q*32

*q*33 

*q*31

*q*32

*q*33 

 0

0 *s*3 

onde *s*1 , *s*2 e *s*3 , são os auto-valores de *A*.

Efetuando as multiplicações indicadas

 *a*11*q*11  *a*12*q*21  *a*13*q*31

*a*11*q*12  *a*12*q*22  *a*13*q*32

*a*11*q*13  *a*12*q*23  *a*13*q*33 

*s*1  *q*11

*s*2  *q*12

*s*3  *q*13 

*a q*

* *a q*
* *a q*

*a q*  *a q*

* *a q*

*a q*  *a q*

* *a q*

  *s*  *q*

*s*  *q*

*s*  *q* 

 21 11

22 21

23 31

21 12

22 22

23 32

21 13

22 23

23 33 

 1 21

2 22

3 23 

*a*31*q*11  *a*32*q*21  *a*33*q*31

*a*31*q*12  *a*32*q*22  *a*33*q*32

*a*31*q*13  *a*32*q*23  *a*33*q*33 

*s*1  *q*31

*s*2  *q*32

*s*3  *q*33 

Observe que os vetores

*q*11 

*q*12 

*q*13 

*q*  *q*







1



21 

*q*  *q*



22 

2

*q*  *q*



23 

3

*q*31 

*q*32 

*q*33 

são as colunas da matriz *Q* e permitem escrever, por um lado

*Q*  *q*1 *q*2 *q*3 

e por outro, o produto

*A*  *Q*  *Q*  *Ad*

sob a forma

*A*  *q*1

*A*  *q*2

*A*  *q*3  *s*1  *q*1

*s*2 *q* 2

*s*3  *q*3 

de onde resulta

*A*  *q*1  *s*1  *q*1 *A*  *q*2  *s*2  *q*2 *A*  *q*3  *s*3  *q*3

ou *A*  *s*1  *I*  *q*1  0

ou *A*  *s*2  *I*  *q*2  0

ou *A*  *s*3  *I*  *q*3  0

Todo vetor *qi*

(não nulo), que satisfaz à relação

*A*  *si*  *I*  *qi*  0

denomina-se auto-vetor da matriz *A*, associado ao auto-vetor *si*

dessa matriz. No caso temos

apenas *i = 1, 2, 3*, pois supuzemos um sistema de 3ª ordem. Entretanto a demonstração pode ser facilmente estendida a um sistema de ordem *n*, qualquer.

*Conclusão:* A matriz *Q* da transformação que diagonaliza a matriz *A* tem suas colunas formadas pelos auto-vetores (linearmente independentes) da própria matriz *A*.

*Exemplo 4*: Determine os auto-valores e auto-vetores da matriz:

*A*   1

 1



 2

 4



Escreva também, a matriz

*Ad* e a matriz *Q* da transformação

*A*  A *d* .

*Solução:*

Auto-valores de *A*:

det *s*  *I*  *A*  det *s*  1

  1



 2   *s*  5  *s*  6  (*s*  2)  (*s*  3)  0



*s*  4

Auto-valores de *s*1  2 e *s*2  3

A matriz diagonalizada será então

*A*

*d s*

 *s*1

0    2 0 

  

0

0





2  

 3

Auto-vetores:

*s*  *I*  *A* *q*

  1

 2  *q*11   0

 *q*  2  *q*  0 ou

*q*  2  *q*

1 1  1

 2 *q* 

0

11 21

11 21

   21   

Dessa equação matricial, resulta apenas uma equação (linearmente independente), a saber:

*q*11  2  *q*21

Há, portanto, uma infinidade de soluções (linearmente dependentes). Com exceção da solução

trivial (isto é

*q*11  0 e

*q*21  0 ), qualquer outra é permitida. Por exemplo:

*q*21  1 e

*q*11  2 .

Escolhemos pois, como primeiro auto-vetor:

*q*1

2

1



Analogamente, com

 

*s*2  3

*s*  *I*  *A* *q*

]   2

 2  *q*12   0

2 2  1

 1 *q* 

0

   22   

 2  *q*12  2  *q*22  0 →  *q*12  *q*22  0

Mais uma vez, temos apenas uma equação independente:

*q*22  1.

*q*12  *q*22 . Podemos escolher

*q*12  1 e

*q*  1

1

2

 

A matriz da tranformação que diagonliza a matriz *A*, é então:

*Q*  *q*1

*q*   2 1

 

1

1

2



Pode-se fazer uma verificação do cálculo, pela condição:

*A*  *Q*  *Q*  *Ad*

*A*  *Q*   1

 2  2

1   4

 3

  4 

1



1

1







  2

 3

*Q*  *A*

 2

1   2

0    4

 3

*d*   





1

1

0

  

 3

 2

 3

Resultado OK.







*Vejamos um exemplo de diagonalização no caso em que os auto-valores são complexos conjugados.*

*Exemplo 5*: O modelo do estado de um sistema, tem como matriz do sistema

*A*   2,25

 4,25



0,25 

 1,75



Determine os auto-valores, os auto-vetores, bem como a matriz diagonalizada matriz de transformação *Q* que diagonaliza a matriz do sistema.

*Solução:*

*Ad* e a

Auto-valores:

det *s*  *I*  *A*  det *s*  2,25  0,25   (*s*  2,25)  (*s*  1,75)  0,75  4,25  *s* 2  4  *s*  5

 4,25 *s*  1,75





Resulta:

*s*1  2  *j* e

*s*2  2  *j*

Matriz diagonalizada:

*A*   2  *j* 0 

*d*  0  2  *j*





Escolha dos auto-vetores:

*s*  *A* *q*

 0,25  *j*

 0,25

  *q*11   0

*s*  2  *j*

1 1 

4,25

 0,25  *j* *q* 

0 1

   21   

0,25  *q*11  *j*  *q*11  0,25  *q*21  0

4,25  *q*11  0,25  *q*21  *j*  *q*21  0

Nesse caso os auto-vetores, geralmente também são complexos:

Cálculo de

*q*11  *a*1 

*q*11  *a*1 

*j*  *b*1 :

*j*  *b*1

*q*21  *a*2  *j*  *b*2

0,25  *a*1 

*j*  *a*1 

*j*  0,25  *b*1  *b*1  0,25  *a*2  *j*  0,25  *b*2  0

Equacionando separadamente as partes real e imaginária:

0,25  *a*1  *b*1  0,25  *a*2  0

*a*1  0,25  *b*1  0,25  *b*2  0

com com

*a*1  0

*b*1  1

vem vem

*a*2  4  *b*1

*a*1  0,25  0,25  *b*2

Fazendo (arbitrariamente)

*a*1  0 e

*b*1  1, resulta

*a*2  4 e *b*2  1

Logo



*j*



*q*  0  *j*

*q*  4  *j* e

*q*    *j* 

11 21

1  4  

*Observação:* Usando-se a 2ª equação, obtém-se o mesmo resultado anterior, o que mostra que as equações não são independentes:

4,25  *q*11  0,25  *q*21  *j*  *q*21  0

4,25  *a*1 

*j*  4,25  *b*1  0,25  *a*2 

*j*  0,25  *b*2 

*j*  *a*2  *b*2  0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4,25  *a*1  0,25  *a*2  *b*2  0 | *a*1  0 | *a*2  4  *b*2 |
| 4,25  *b*1  0,25  *b*2  *a*2  0 | *b*1  1 | 0,25  *b*2  *a*2  4,25 *b*2  4  *a*2  17 |
| *b*2  16  *b*2  17  O mesmo resultado anterior. | *b*2  1 | *a*2  4 |

*s*  *A* *q*

 0,25  *j*

 0,25

  *q*12   0

2 2 

4,25

 0,25  *j* *q* 

0

   22   

0,25  *q*12  *j*  *q*12  0,25  *q*22  0

4,25  *q*12  0,25  *q*22  *j*  *q*22  0

*q*12  *c*1 

*j*  *d*1

*q*22  *c*2 

*j*  *d* 2

Cálculo de

*q*12  *c*1 

*j*  *d*1 :

0,25  *c*1  *j*  0,25  *d*1  *j*  *c*1  *d*1  0,25  *c*2  *j*  0,25  *d* 2  0

Equacionando separadamente as partes real e imaginária:

0,25  *c*1  *d*1  0,25  *c*2  0

 0,25  *d*1  *c*1  0,25  *d* 2  0

*c*1  0

0,25  *d*1  0,25  *d* 2

*d*1  0,25  *c*2

*d*1  *d* 2  1

*c*2  4

Logo

*q*12

 0  *j*

*q*22

 4  *j* e

*q*    *j* 



4 

*j*

1





Assim, a matriz *Q* e sua inversa, serão:

*Q*    *j*

* *j* 

*Q* 1   0,125  0,5 *j*

 0,125

 4  *j*



*j*







4  

 0,125  0,5 *j*

0,125 

Verificação:

*A*  *Q*  *Q*  *Ad*

*A*  *Q*   2,25

0,25     *j*





 *j*    1  *j*  2

*j*





1  *j*  2 



 4,25



 1,75  4  *j*

4    7  *j*  6

 7  *j*  6

*Q*  *A*    *j*

 *j*    2  *j*

0    1  *j*  2

1  *j*  2 

*d*  4  *j*



*j*





4    0

 2  *j*  7  *j*  6

 7  *j*  6

Resultado O.K.





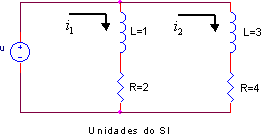


*Exemplo 6*: Escreva, para o circuito da figura abaixo, as equações de estado, usando as correntes de malha como variáveis de estado. Calcule os auto-valores e auto-

vetores da matriz *A*, a matriz *Q* da transformação

*A*  *Ad* , e escreva as novas equações

de estado com auxílio da matriz do sistema diagonalizada. Interprete o significado físico das novas variáveis de estado.



Variáveis de estado:

*x*1  *i*1 (*t*)

*x*2  *i*2 (*t*)

*Solução*:

Equações de análise de malhas:

 

1  *x*1  2  *x*1  1  *x* 2  2  *x*2  *u*(*t*)

  

3  *x* 2  4  *x*2  2  *x*2  1  *x* 2  1  *x*1  2  *x*1  0

Reescrevendo:

 

*x*1  2  *x*1  *x* 2  2  *x*2  *u*(*t*)

 

 *x*1  2  *x*1  4  *x* 2  6  *x*2  0

Somando as equações membro a membro:



3  *x* 2  4  *x*2  *u*(*t*)

Somando 4 vezes a primeira com a segunda:



3 *x*1  6  *x*1  2  *x*2  4  *u*(*t*)

Resultam as equações de estado:

* + 2 4

*x*1  2  *x*1  3  *x*2  3  *u*(*t*)

* + - 4 1

*x* 2   3  *x*2  3  *u*(*t*)

  

 2

2 3 

 *x* 

4 3

 *x*1  

 1 

 *u*(*t*)

   0



 4 3

*x* 

1 3

*x* 2  

  2   

det *s*  *I*  *A*  det *s*  2  2 / 3   (*s*  2)  (*s*  4 3)  0





Auto-valores

 0 *s*  4 3

*s*1  2 e *s*2   4 3

Portanto:

*A*   2 0 

*d*   4 3

0





Auto-vetores

Para

*s*  2 → *s*  *I*  *A* *q*

 0  2 3  *q*11   0

1 1 1 0  2 3 *q* 

0

Resulta



*q*11 qualquer e *q*21  0 . Faremos *q*11  1. Logo:

  21   

1



*q*1 0

Para

*s*   4 3

→ *s*



 *I*  *A* *q*



 2 3

 2 3  *q*12   0

2 2 2  0

0  *q*  0

Resulta



*q*12  *q*22 . Faremos *q*12  *q*22  1. Logo:

  22   

*q*  1 e

1

2

 

*Q*  *q*1

*q*   1 1

 

0

1

2



*Det* (*Q*)  1

*Q* 1  1



0

 1



1



Na nova representação temos:

*A*   2 0 

*B*'  *Q* 1  *B*  1

 1  4 3   1 

*d*  0

 4 3

0 1 

1 3

1 3

       

As novas variáveis se relacionam com as antigas pela transformação:

*x*'  *Q* 1  *x*  1

 1   *x*1 

*x*'  *x*  *x*

*x*'  *x*

   

0

1

*x*

   2 

1 1 2 2 2

*x*'1 e

*x*'2

podem ser interpretadas como correntes de ramo, no circuito dado. Da fato, as

novas equações podem ser postas sob a forma:



*x*'1  2  *x*'1 *u*(*t*) ou



*x*'2   4 3  *x*'2  1 3  *u*(*t*) ou



*x*'1 2  *x*'1  *u*(*t*)



3  *x*'2 4  *x*'2  *u*(*t*)

As duas últimas equações à direita são as equações do circuito por análise de correntes de ramos.

*Observação:* Note que quando se diagonaliza a matriz do sistema as variáveis de estado ficam desacopladas, isto é, em cada equação escalar de estado só comparece uma das variáveis de estado, além das variáveis de entrada.

*Finalmente, um exemplo focalizando um sistema de terceira ordem.*

*Exemplo 7*: O modelo de estados de um sistema é descrito pelas matrizes:

0 1 0   9 







*A*  0  2 1 



*B*   6 

*C*  1

1 1

*D*  0

0 1  2

 18

Escreva as equações desse sistema com as variáveis desacopladas.

*Sol ução:*

*s*  1 0 

det *s*  *I*  *A*  det 0 *s*  2  1   *s*  (*s* 2  4  *s*  4)  *s*  *s*  (*s*  1)  (*s*  3)





0  1 *s*  2

auto-valores:

*s*1  0

*s*2  1

*s*3  3

Matriz diagonalizada:

0

*A*  0



*d*

0

0 0 

 1 

0



0  3

Cálculo dos auto-vetores:

0  1

0  *q*11 

0

*s*  *I*  *A* *q*

 0 2

 1  *q*

  0

*s*  0

1 1 

  21    1

0  1

2 

*q*31 

0

Resulta:

*q*11 qualquer,  *q*21  0 e 2  *q*21  *q*31  0 . Em conseqüência, fazendo *q*11  1 , vem:

*q*11 

1

 1  1

0  *q*12 

0

*q*  *q*

  0

*s*  *I*  *A* *q*

  0

1  1  *q*

  0

*s*  1

1  21   

2 2 

  22    2

*q*31 

0

 0

 1 1 

*q*32 

0

Resulta:

*q*12  *q*22  0 e *q*22  *q*32  0 . Fazendo *q*12  1, vem:

*q*12 

 1

 3  1

0  *q*13 

0

*q*  *q*

   1 

*s*  *I*  *A* *q*

  0

 1  1  *q*

  0

*s*  3

2  22   

3 3 

  23    3

*q*32 

 1 

 0

 1  1

*q*33 

0

Resulta:  3  *q*13  *q*23  0 e *q*23  *q*33  0 . Fazendo *q*13  1 , vem:

*q*13   1 

*q*  *q*

   3

3  23   

*q*33 

 3 

A matriz *Q* da transformação por similitude é:

1

*Q*  0



0

 1 1 

1  3



1 3 

1

e *Q* 1  0



0

2 3

1 2

 1 6

1 3

1 2



1 6

Determinação da matriz *B*' :

1 2 3

1 3  9 

 7 

*B*'  *Q* 1  *B*  0 1 2

1 2   6

   6

     

0  1 6 1 6  18  4

Determinação da matriz *C*' :

*C*'  *C*  *Q*  1 1

1 1 0

0



 1 1 

1  3  1 1 1



1 3 

Finalmente, as equações de estado e de saída, com as variáveis desacopladas, são respectivamente:

  

 *x*'1  0 0

0   *x*'1   7 

    0  1

0   *x*'    6  *u*(*t*)

*x*'2  

  2   

   0 0

 3  *x*'   4

 *x*'3  

  3   

 *x*'1 

*y*(*t*)  1 1 1 *x*' 



2 

 *x*'3 

# *Outros casos de transformações*

Consideremos um sistema cuja equação característica é:

*Q* (*s*)  *s n*  *a*  *s n*1  *a*  *s n*2  K  *a*  *s*  *a*

1 2 *n*1 *n*

A matriz *A* desse sistema pode ser apresentada sob a forma:

 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | K | 0 |
| 0 | 0 | 1 | K | 0 |
| K | K | K | K | K |
| 0 | 0 | 0 | K | 1 |

 

 

*A*   

 

 

 *an*

* *an*1
* *an*2

K  *a*1 

Note que a última linha da matriz é formada pelos coeficientes do polinômio característico, na ordem inversa e com o sinal contrário com que aparecem no polinômio. Além disso todos os elementos situado logo acima da diagonal principal, são unitários. Os demais elementos da matriz, são nulos. Essa é a denominada forma canônica da matriz do sistema.

Sejam *s*1 , *s*2 , K, *sn* , os auto-valores da matriz A. A matriz diagonalizada será:

*s*1 0



 *s*2

0

*Ad*   0 0



K K

 0 0

0 K

0 K

*s*3 K

K K

0 K

0 



0



0 



K

*sn* 

Prova-se facilmente que a matriz

*Q*  *Qv* , da transformação que leva a matriz *A* sob a forma

canônica à matriz

*Ad* , é a seguinte:

 1 1

 *s*1 *s*2



1 K

*s*3 K

1 

*sn* 



*Q*   *s* 2 *s* 2 *s* 2 K *s* 2 

*V*  1 2 3 *n* 

 K K K K K 

*s n*1 *s n*1 *s n*1 K *s n*1 



1

2

3

*n*



É a denominada matriz de Vandermond, relativa aos auto-valores de *A*. Pode-se provar esse fato diretamente pelo cálculo dos auto-vetores, ou, indiretamente, verificando a relação:

*Ac*  *Qv*  *Qv*  *Ad*

*Exemplo 8*: Mostre que a matriz de transformação que diagonaliza a matriz

*Ac* abaixo,

apresentada sob forma canônica, é a matriz de Vandermond relativa aos auto-valores de

*Ac* .

 0 1 0   1 0 0 



0



*d*



*A*   0 0 1 



*c*

*A*   0  2 

 8  14  7

 0 0  4

*Solução:*

A equação característica de *A*, é:

*Q* (*s*)  *s* 3  7  *s* 2  14  *s*  8  (*s*  1)  (*s*  2)  (*s*  3)

Auto-valores:

*s*1  1,

*s*2  2 ,

*s*3  4

Determinação dos auto-vetores:

*s* 1 0 

*s*  *I*  *A*  0 *s* 1 





8 14 *s*  7

 1  1 0  *q*11 

0

*s I*  *A* *q*

  0  1  1  *q*

  0

*s*  1

1 1 

  21    1

 8 14

6 

*q*31 

0

 *q*11  *q*21  0

 *q*21  *q*31  0

*q*21  *q*11

*q*31  *q*21

Fazendo

*q*11  1 , vem

*q*21  1 e

*q*31  1 →

*q*1  1

 1 1'

 2  1 0  *q*12 

0

*s I*  *A* *q*

  0  2  1  *q*

  0

*s*  2

2 2 

  22    2

 8

14 5 

*q*32 

0

 2 *q*12 *q*22  0

 2 *q* 22 *q*32  0

*q* 22  2  *q*12 *q* 32  2  *q*22

Fazendo

*q*12  1, vem

*q*22  2

e *q*32  4 →

*q*2  1  2

4'

 4  1 0  *q*13 

0

*s I*  *A* *q*

  0  4  1  *q*

  0

*s*  4

3 3 

  23    3

 8 14

3 

*q*33 

0

 4  *q*13  *q*23  0

 4  *q*23  *q*33  0

*q*23  4  *q*13 *q*33  4  *q*23

Fazendo

*q*13  1, vem

*q*23  4

e *q*33  16 →

*q*3  1

 4 16'

 1 1 1   1 1 1 

*Q*   1  2  4   *s s s* 

*V*    1 2 3 

 1 4 16  *s* 2 *s* 2 *s* 2 

   1 2 3 

Tranformação de uma matriz sob forma qualquer *A* para a forma canônica

*Ac* , pode ser

obtida por uma sequência de duas transformações:

*A*  *Ad*

 *Ac* . De fato

*A*  *A* : *A*

 *Q* 1  *A*  *Q*

e *A*  *A* : *A*  *Q*

 *A*  *Q* 1

*d d d c c V d V*

ou, compondo essas duas relações:

*Ac*  *QV*

*V*

1

 *Q* 1 *A*  *Q*  *Q*

1  *T* 1  *A* *T*

onde

*V*

*T*  *Q*  *QV* e

*T* 1  *Q*

 *Q* 1

*Exemplo 9*: Dado o sistema descrito pelas matrizes:

*A*   1



 3

1 

 5

2

1

*B* 

*C*   1 0

 1 2





 2 

*x*0  3



       

determine a matriz *T* da transformação que leva a matriz do sistema à forma canônica e escreva as equações de estado e de saída do sistema transformado. Quais os valores iniciais das novas variáveis de estado?

*Solução:*

det *s*  1

 1   *s* 2  6  *s*  8  (*s*  2)  (*s*  4)

 *s*  5



0







3





*A*   0 1 

*s*  2

*s*  4

*A*   2 0 

*Q*   1 1 

*c*  8





 6 1 2

*d*   4

*V*  2

 4

*Q*   1 1 

*Q* 1   1,5

0,5 

*Q* 1   2

0,5 

 1  3





,05

 0,5

*V*  1

 0,5

*T*  *Q*  *Q* 1  1 0









*T* 1  *Q*

 *Q* 1   1 0

*V*  

1

1

 

*V*  1 

Verificação:



1



*A*  *T* 1  *A*  *T*   1

0   1

1   1



1



0   0 1 

1







*c*  1



1

  3

 5 

  8

 6

*B*  2





*B*'   3,5 

*C*   1 0

*C*'   1 1 

1

 1,5

 1 2

 3  7

       

 2 



*x*0  3

1,5

*x*0 0,5

' 

   

# *Exercícios Propostos*

1. As equações de estado e de saída de um sistema, são:

    0

2   *x* 

 2

 *x* 

 *x*1  



 1 

 *u*(*t*)

e *y*  1

2 1

   1

 3

*x* 

 1

*x* 

*x* 2  

  2   

 2 

Supondo condições iniciais nulas e

*u*(*t*)  *h*(*t*)  *degrau unitário*.

1. Determine a matriz *Q* de transformação capaz de diagonalizar a matriz do sistema.
2. Escreva as equações de estado e de saída do sistema, com a matriz *A*

diagonalizada.

1. Determine a matriz de transição de estado diagonalizada.

(*s*) , para o caso da matriz *A*

1. Calcule a resposta

*Y* (*s*)

do sistema.

1. Determine a resposta

*y*(*t*)

do sistema.

*Respostas:*

*Q*   2 1 

*B*'   3 

*C*'  0

 1

*Y* (*s*)  3

*y*(*t*)  3 (1  *e* 2*t* )

 1

 1

 3

*s*(5  2) 2

   

1. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema linear:

    0

1   *x* 

0 0

*u* 

 *y*  1

1   *x* 

 *x*1  

 1 

 1 e 1   1

   8



 6

*x* 

1 1

*u* 

 *y* 

1  1

*x* 

*x* 2  

  2  

  2 

 2  

  2 

Determine:

* 1. Os auto-valores e auto-vetores da matriz do sistema.
  2. A matriz *Q*, de transformação por similitude e sua inversa

*Q* 1 , e escreva as

equações de estado e de saída do sistema para as variáveis de estado desacopladas.

* 1. A resposta do sistema representado pelas equações do item anterior, para o

caso de condições iniciais nulas e

*u*(*t*)  *h*(*t*)  *degrau unitário*.

*Respostas:*

*s*  2

*s*  4

*q*   1 

*q*   1 

*Q*   1

1  *Q* 1  0 0

1 2 1

 2

2  4

 2

 4

1 1

       

  

 2

0   *x* '

 0,5

0,5 

*u* 

 *y* 

 1

 3

 *x* '

 *x*1 ' 

 1 

 1 e 1   1

   0



 4

*x* '

 0,5

,05

*u* 

 *y*   3

5  *x* '

*x* 2 ' 

  2  

  2 

 2  

  2 

*y*  0,25  0,5  *e* 2*t*  0,75  *e* 4*t* e *y*  0,25  1,5  *e* 2*t*  1,25  *e* 4*t*

1

2

1. Dado o sistema cuja representação de estado é descrita pelas matrizes:

*A*   11 9





 13 7

1

1

*B* 

*C*  1 0 e

*D*  0

 1

*x*0  2 

     

Determine:

* 1. A transformação que diagonaliza a matriz *A*.
  2. As novas matrizes *B*' e *C*'.
  3. O estado inicial descrito pelas novas variáveis de estado.

*Respostas:*

*Q*   2  *j*  6,0000

2  *j*  6,0000 



*B*'  0,0769  *j*  0,1154





 0  *j*  0,43331



0  *j*  0,43331

0,0769  *j*  0,1154

*C*'  2 

*j*  3

2  *j*  3

*D*  0

*x*'   0,5961  *j*  0,2308

0  0,5961  *j*  0,2308





1. Quando os auto-valores (pólos) de um sistema são complexos conjugados, a matriz diagonalizada apresenta pouco interesse, pois transformações complexas não têm interpretação física imediata. Assim, um sistema de 2ª ordem cuja equação característica é:

*s* 2  2   *s*   2  (*s*  ) 2   2  0

0 *d*

com

0  ( 

)  1 e  2   2   2

0 *d* 0

possui auto-valores:

*s*1   

*j*  *d* e

*s*2    *j*  *d*

e na matriz diagonalizada, prefere-se obter a matriz transformada sob a forma:

*A*'    



 

 *d* 

 

 *d* 

Determine a matriz de transformação *T*, que transforma a matriz canônica desse sistema na matriz *A*', acima indicada.